



考虑轮毂运动的大型风力机叶片非线性振动分析

回忆 王琳凯 蒋博闻

Nonlinear vibration analysis of large wind turbine blades considering hub motion

HUI Yi, WANG Linkai, JIANG Bowen

引用本文:

回忆, 王琳凯, 蒋博闻. 考虑轮毂运动的大型风力机叶片非线性振动分析[J]. 空气动力学学报, 2025, 43(4): 103–117. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2024.0183

HUI Yi, WANG Linkai, JIANG Bowen. Nonlinear vibration analysis of large wind turbine blades considering hub motion[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2025, 43(4): 103–117. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2024.0183

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2024.0183>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

百米级大柔性风电叶片非线性气弹响应分析

Nonlinear aeroelastic response analysis of 100-meter-scale flexible wind turbine blades

空气动力学学报. 2022, 40(4): 220–230 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0321>

基于致动线方法的5 MW海上风力机气动弹性分析

Aeroelastic analysis of a 5 MW offshore wind turbine based on actuator line method

空气动力学学报. 2022, 40(4): 203–209 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0048>

基于风洞试验15 MW风力机叶片颤振后形态与能量图谱研究

Experimental study on the post-flutter morphological characteristics and energy dissipation of a 15 MW wind turbine blade

空气动力学学报. 2022, 40(4): 169–180 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0417>

台风过境全过程大型风力机风荷载特性

Wind loads characteristic of large wind turbine considering typhoon transit process

空气动力学学报. 2020, 38(5): 915–923 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0108>

不同涡脱落模式下垂直轴风力机叶片的气动响应

Aerodynamic responses of vertical-axis wind turbine foil to different vortex shedding patterns

空气动力学学报. 2023, 41(6): 26–34 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2022.0040>

偏航失效时海上风力机不同停机位置下响应特性

Response characteristics of offshore wind turbines under different parking positions considering yaw control system failure

空气动力学学报. 2022, 40(4): 181–190 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0438>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱

电话: 0816-2463375

Email: kqdlxxb@163.com



关注微信公众号

获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2025)04-0103-15

考虑轮毂运动的大型风力机叶片非线性振动分析

回忆^{1,*}, 王琳凯¹, 蒋博闻²

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045;
2. 东方电气集团东方电机有限公司研发中心, 德阳 618000)

摘要:随着风力机尺寸不断增大, 其叶片长度增加, 同时刚性降低, 导致其变得愈发柔软, 这种“长柔”特性使得叶片大幅振动问题愈发突出。非线性振动分析是准确评估叶片响应的关键, 使用精确的动力学模型准确分析叶片的动力学行为尤为重要。基于 Euler-Bernoulli 梁连续体建模方法, 以 NREL 5 MW 风力机叶片为研究对象, 同时考虑挥舞和摆振两个方向的自由度建立了叶片的非线性动力学模型。为了更加准确地模拟叶片响应, 在建模过程中考虑了两个正交方向的轮毂运动以及由此引起的惯性激励和相关的气动载荷, 重点分析了轮毂运动幅值和偏航角对叶片动力学行为的影响。结果表明: 旋转叶片在相同的激励幅值下, 第 2 阶模态的峰值远高于第 1、3 阶模态的峰值, 且带宽明显更窄; 叶片的第 1、2、3 阶模态之间因自振频率的倍数关系会发生模态间的内共振, 且模态间存在能量传递; 运行状态下, 叶片第 1 阶模态响应的振幅对偏航角最为敏感, 会随着偏航角的增大而显著增大, 而第 2 阶和第 3 阶模态响应的振幅则几乎不受偏航角的影响。本文通过揭示旋转叶片非线性振动与内共振特性, 为大型风力机叶片的抑振设计及运行参数优化提供了关键理论依据, 对提升结构安全性与经济性具有重要参考价值。

关键词: 风力机; 旋转叶片; 连续体法; 非线性; 内共振

中图分类号: TK83 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2024.0183

Nonlinear vibration analysis of large wind turbine blades considering hub motion

HUI Yi^{1,*}, WANG Linkai¹, JIANG Bowen²

(1. School of civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
2. Research and Development Center of Dongfang Electric Group Dongfang Motor Co., Deyang 618000, China)

Abstract: With the continuous increase in wind turbine size, the lengthening blades exhibit reduced rigidity, leading to enhanced structural flexibility. This "long-flexible" characteristic exacerbates the issue of significant blade vibrations, and nonlinear vibration analysis plays a crucial role in accurately assessing blade responses. Establishing precise dynamic models to analyze blade behavior is of paramount importance. In this study, based on the Euler-Bernoulli beam theory, a nonlinear dynamic model is developed for the NREL 5 MW wind turbine blade, incorporating degrees of freedom in both flapwise and edgewise directions. To improve the accuracy of blade response prediction, the present model accounts for orthogonal hub motions, including the resulting inertial excitations and aerodynamic loads. The influence of hub motion amplitude and yaw angle on the blade's dynamic behavior is systematically analyzed. The results indicate that, under the same excitation amplitude, the peak value of the second mode is significantly higher than those of the first and third modes, with a much narrower bandwidth. Internal resonance occurs among the first, second, and third modes due to a harmonic relationship of their natural frequencies, leading to energy transfer among modes. Under operating conditions, the amplitude of

收稿日期: 2024-11-13; 修订日期: 2024-12-17; 录用日期: 2024-12-23; 网络出版时间: 2025-04-01

基金项目: 国家重点研发计划(2023YFC3805201)

作者简介: 回忆^{*}(1985—), 男, 内蒙古包头人, 研究员, 研究方向: 工程结构抗风. E-mail: alihui@cqu.edu.cn

引用格式: 回忆, 王琳凯, 蒋博闻. 考虑轮毂运动的大型风力机叶片非线性振动分析[J]. 空气动力学学报, 2025, 43(4): 103–117.

HUI Y, WANG L K, JIANG B W. Nonlinear vibration analysis of large wind turbine blades considering hub motion[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2025, 43(4): 103–117(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2024.0183

the first mode response is highly sensitive to the yaw angle, increasing substantially as the yaw angle increases, while the second and third modes remain almost unaffected by the yaw angle. This study investigates the nonlinear vibrations and internal resonance characteristics of rotating blades, providing a critical theoretical basis for vibration suppression design and operational parameter optimization of large-scale wind turbine blades, offering significant insights for enhancing structural safety and economic performance.

Keywords: wind turbine; rotating blades; continuum method; nonlinear; internal resonance

0 引言

随着全球对可再生能源需求的持续增长,风力发电机的数量和尺寸在过去几十年间经历了快速增长。同时,风力机叶片的长度也在不断增大,目前已超过 100 m^[1]。这使得叶片变得更加柔软,导致其容易发生大幅度振动,并表现出显著的几何非线性特性。为了系统研究风力机叶片的非线性振动行为,精确的动力学建模以及非线性动力分析^[2-3]显得尤为重要。

现有的针对大型风力机叶片的建模方法主要有两种:有限元方法(finite element method, FEM)^[4]和连续体法。目前已有较多研究采用 FEM 对风力机叶片在不同工况下的疲劳和极限荷载进行了深入分析。Wang 等^[5]开发的 Beamdyn 计算模块基于几何精确模型对风机叶片进行模拟,通过 Legendre 谱有限元模型对运动方程进行离散化,较好地描述了叶片的几何非线性。钱晓航等^[6]采用 Legendre 谱有限元模型对长柔叶片进行非线性气弹响应分析,指出了采用非线性模型和线性模型计算的叶尖位移具有较大差距。然而,为了确保分析结果的准确性,有限元模型通常需要大量的单元和自由度。这会导致在处理非线性效应时计算效率低,更为重要的是在空间离散过程中,有限元模型难以直接建立叶片几何参数和物理参数与动力学响应的关系。

连续体方法^[7-9]在理论非线性动态分析中,通过使用连续函数,避免了空间离散化,显著减少了自由度。此外,该方法的控制方程基于目标结构的所有物理参数和几何参数,能够更加清晰地揭示这些参数对动态行为的影响过程^[10]。近年来,连续体模型在风力机叶片的动态行为研究中逐渐受到关注。Yuan 和 Wang^[9]考虑叶片挥舞方向的前 3 阶模态和摆振方向的第 1 阶模态,对叶片进行非线性动力分析,探讨了较为高频的挥舞方向第 3 阶模态主共振以及联合共振问题。Karimi 和 Moradi^[11]基于连续体模型,考虑叶片挥舞方向的前 2 阶模态和摆振方向的第 1 阶模态,在非共振和内共振条件下进行了自由振动分析。然而,现有的连续体模型仅考虑垂直于转子平面的轮毂激励,而在实际工程中,轮毂可以沿任何方向运动^[12]。

同时,现有研究中推导的气动力假设入流方向垂直于转子平面,这与风力机在偏航条件下的实际运行情况并不一致^[13]。轮毂运动及其对叶片的气动载荷会导致偏斜入流,进而增强诱导因子的非对称分布,引起叶片周期性激励,导致产生更加不利的响应^[14-15]。现有叶片模型的表述和风载荷函数仅针对特定条件,因此不具有普遍适用性。在风力涡轮机叶片的非线性动态分析中,如果不考虑任意方向的轮毂运动和倾斜的气流,就无法考虑与方位角相关的激振力振幅和相关气动力的影响。

本文基于连续体建模方法,采用 Euler-Bernoulli 梁模型推导了支撑于移动轮毂上的风力发电机叶片的运动方程,提出了一种新的风力机叶片气动弹性模型。与已有惯性力模型不同,本研究通过在模型中引入两个自由度来模拟任意导向轮毂运动引起的惯性激励和相关的气动载荷。此外,基于 Greenberg 理论^[16]、叶素动量理论^[17]以及斜尾迹修正模型推导得到了非定常气动载荷,并与 Jonkman 等^[18]以及开源模块的计算结果进行了对比。本研究为风力机叶片系统的非线性动态行为提供了新的理论依据和计算工具,对实际应用中如何监测叶片响应提出了建议。

1 连续体建模

对于轮毂运动下的叶片,一方面,停机叶片由于气动阻尼水平较低,容易在共振条件下发生大幅的振动,需要特别关注此工况下的非线性力学行为;另一方面,旋转叶片受到旋转与支座激励的耦合效应的影响,此工况下的叶片非线性动力响应规律尚不清楚。针对无法利用现有叶片非线性动力学模型对上述工况进行准确描述的问题,本节将基于广义 Hamilton 原理推导出风力机叶片的非线性振动的数学模型,并作以下假设:(1)轮毂和机舱为集中质量;(2)忽略叶片的剪切、翘曲、扭转和拉伸变形;(3)叶片截面关于弦线对称。

大型风力机叶片具有截面参数沿展向不均匀分布和翼型预扭的特点,在研究单叶片的运动时需要引入 4 个坐标系(图 1):(1)惯性坐标系(X - Y - Z)的原点位于支撑结构变形前的轮毂中心 O ,其 X 轴和 Z 轴分

别垂直向上和水平指向下风向,与 Y 轴构成右手坐标系;(2)轮毂坐标系($x_h-y_h-z_h$)由惯性坐标系绕 Z 轴旋转 ψ 得到,原点位于运动的轮毂中心 O' ,其 z_h 轴与 Z 轴重合, x_h 轴指向目标叶片的叶尖,与 y_h 轴构成右手系;(3)叶根坐标系($x-y-z$)在轮毂坐标系($x_h-y_h-z_h$)的基础上,先沿着 x_h 轴方向平移 r_h ,再绕 z_h 轴和 y_h 轴分别旋转 ψ 和 β_{pc} 得到。其原点位于叶根 O_1 处, x 轴为连接叶片各截面1/4弦线点的直线,即变形前的叶片中性轴;(4)弦线坐标系($\xi-\eta-\zeta$)用于描述变形后的截面,其原点位于变形后叶片截面弹性中心, ξ 轴沿着变形后弹性轴的切线方向,由叶根指向叶尖, η 轴由叶片前缘沿着弦线方向指向后缘,与 ζ 轴一同构成右手系。4个坐标系的单位方向向量可分别表示为 $\mathbf{i}_{XYZ} = \{i_X, i_Y, i_Z\}^T$ 、 $\mathbf{i}_{x_h y_h z_h} = \{i_{x_h}, i_{y_h}, i_{z_h}\}^T$ 、 $\mathbf{i}_{xyz} = \{i_x, i_y, i_z\}^T$ 和 $\mathbf{i}_{\xi\eta\zeta} = \{i_\xi, i_\eta, i_\zeta\}^T$ 。

图1中: β_{pc} 表示叶片的锥角; ψ 表示目标叶片的方位角; ϕ 表示叶片截面的变形扭转角; θ 表示叶片截面的总桨距角,是预扭角 θ_0 和控制桨距角 θ_p 之和;

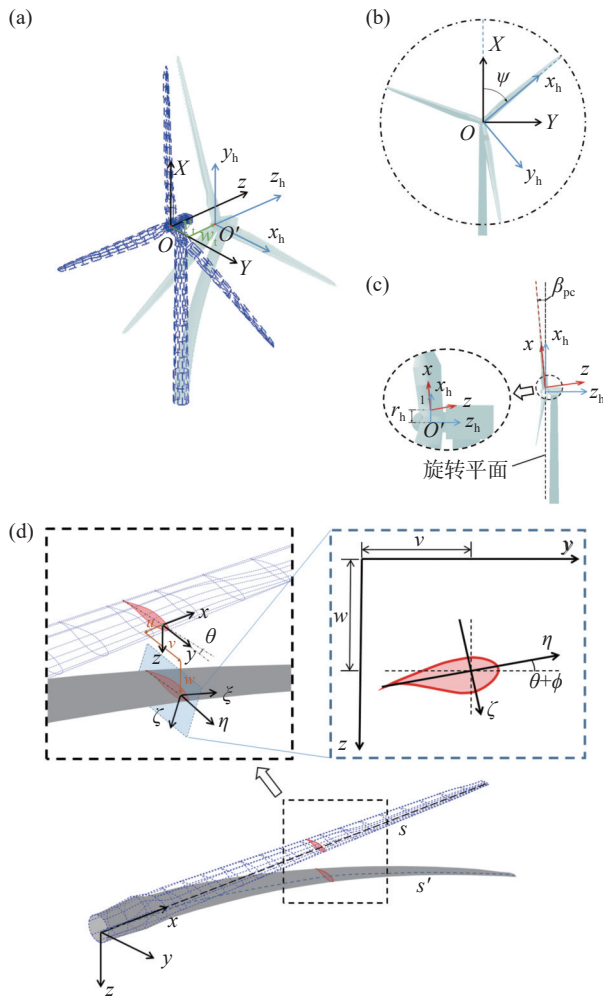


图1 风力机坐标示意图

Fig. 1 Sketch of the wind turbine coordinates

u 、 v 和 w 分别为叶片任意截面上弹性中心沿 x 、 y 和 z 轴发生的位移。根据本文研究中叶片的零扭转和延伸的假设,代入坐标系转换公式可得:

$$u' = -\frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) + o(\varepsilon^4) \quad (1)$$

式中 ε 表示应变张量。

1.1 势能

风力机模型中势能 Π 包括弹性应变能 Π_e 和重力势能 Π_g 。由于将叶片等效为Euler-Bernoulli梁,故其弹性应变能的变分 $\delta\Pi_e$ 为:

$$\delta\Pi_e = \int_0^L \left(\iint_A E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} d\eta d\zeta \right) dx \quad (2)$$

式中: L 、 A 分别为叶片长度和截面面积; E 为叶片材料的弹性模量; ε_{11} 为梁的法向应变张量,可由经典应变张量 ε 的表达式获得,如式(3)所示:

$$d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = 2[d\mathbf{s}, d\eta, d\zeta] \mathbf{e}_i [d\mathbf{s}, d\eta, d\zeta]^T \quad (3)$$

式中, $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r}_1$ 分别表示变形前后叶片上任意一点的空间位置向量,由叶根坐标系 $x-y-z$ 的原点指向目标点。 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r}_1$ 的表达式如式(4、5)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{x_h y_h z_h}^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\quad \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{\xi\eta\zeta}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_r^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\quad \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{x_h y_h z_h}^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\quad \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{\xi\eta\zeta}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_r^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\quad \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{T}^T|_{u=v=w=0} \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, v_t 、 w_t 表示轮毂中心沿 y 、 z 轴方向的位移。

将式(4、5)代入式(3)可得:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_e = & \left[A_1''v'' + 2A_1'v''' + A_1v'''' + A_3''w'' + \right. \\ & \left. 2A_3'w''' + A_3w'''' + U_{n,v}(v,w) \right] \delta v + \\ & \left[A_3''v'' + 2A_3'v''' + A_3v'''' + A_2''w'' + \right. \\ & \left. 2A_2'w''' + A_2w'''' + U_{n,w}(v,w) \right] \delta w \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $U_{n,v}(v,w)$ 和 $U_{n,w}(v,w)$ 分别表示叶片 y 和 z 方向弹性应变能的非线性项, 具体表达式见附录 A 式(A1、A2); 系数 A_i ($i=1, 2, 3$) 的表达式为:

$$\begin{cases} A_1 = EI_{zz}\cos^2\theta + EI_{yy}\sin^2\theta \\ A_2 = EI_{zz}\sin^2\theta + EI_{yy}\cos^2\theta \\ A_3 = (EI_{zz} - EI_{yy})\sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad (7)$$

式中, EI_{yy} 和 EI_{zz} 分别表示叶片垂直于弦线方向和沿着弦线方向的抗弯刚度。

重力势能的变分 $\delta\Pi_g$ 可写为:

$$\delta\Pi_g = \int_0^L (\delta\mathbf{r}_g \cdot \mathbf{f}_g) dx \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}_g$ 表示变形后任意叶片截面质量中心的空间位置向量, $\mathbf{f}_g$ 为重力。 $\mathbf{r}_g$ 和 $\mathbf{f}_g$ 的表达式如式(10)所示:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_g = \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{\xi\eta\zeta}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ e_m \\ 0 \end{Bmatrix} \\ = \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ v_t \\ w_t \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_r^T \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ \mathbf{T}_r^T \mathbf{T}_c^T \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_r^T \mathbf{T}_c^T \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ e_m \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{f}_g = \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} -\rho Ag \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)可得:

$$\delta\Pi_g = \{f_{g,c}^v + f_{g,k}^v\} \delta v + \{f_{g,c}^w + f_{g,k}^w\} \delta w \quad (10)$$

由式(10)可知, 重力势能中包含周期荷载项 $f_{g,c}^v$ 和 $f_{g,c}^w$ 与刚度项 $f_{g,k}^v$ 和 $f_{g,k}^w$, 其具体表达式见附录 A 式(A3~A6)。

1.2 动能

用两自由度(v_t 和 w_t)描述轮毂运动, 因此叶片动能变分 δT 的表达式为:

$$\delta T = - \int_0^L \iint_A \rho \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 d\eta d\zeta dx \quad (11)$$

式中: ρ 表示叶片材料的密度, “ $\cdot$ ” 和 “ $\dots$ ” 表示对时

间求一阶导和二阶导。 $\dot{\mathbf{r}}_1$ 和 $\delta \mathbf{r}_1$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 = & \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} \dot{u}_t \\ \dot{v}_t \\ \dot{w}_t \end{Bmatrix} + \mathbf{i}_{x_h y_h z_h}^T \left[\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{x_h y_h z_h}^T \cdot \mathbf{P}_{x_h y_h z_h}^T \\ + \dot{\mathbf{P}}_{x_h y_h z_h} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \\ & \mathbf{i}_{xyz}^T \left[\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{xyz}^T \cdot \mathbf{P}_{xyz}^T + \dot{\mathbf{P}}_{xyz}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + 2\mathbf{P}_{xyz}^T \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} \right] + \mathbf{i}_{\xi\eta\zeta}^T \left[\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\xi\eta\zeta}^T \cdot \mathbf{P}_{\xi\eta\zeta}^T + \dot{\mathbf{P}}_{\xi\eta\zeta}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_1 = & \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} \delta u_t \\ \delta v_t \\ \delta w_t \end{Bmatrix} + \delta \mathbf{T}_r^T \cdot \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ & \mathbf{i}_{xyz}^T \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} + \delta \mathbf{T}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\mathbf{P}_{x_h y_h z_h}$ 、 $\mathbf{P}_{xyz}$ 和 $\mathbf{P}_{\xi\eta\zeta}$ 分别为轮毂坐标系 $x_h-y_h-z_h$ 、叶根坐标系 $x-y-z$ 与弦线坐标系 $\xi-\eta-\zeta$ 的角速度矩阵, 它们的表达式为:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{x_h y_h z_h} = \dot{\mathbf{T}}_r \cdot \mathbf{T}_r^T \\ \mathbf{P}_{xyz} = \mathbf{T}_c \cdot \dot{\mathbf{T}}_r \cdot \mathbf{T}_r^T \cdot \mathbf{T}_c^T \\ \mathbf{P}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_c \cdot \dot{\mathbf{T}}_r \cdot \mathbf{T}_r^T \cdot \mathbf{T}_c^T \cdot \mathbf{T}^T + \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^T \end{cases} \quad (14)$$

将式(12~14)代入式(11)中可得 δT 的表达式为:

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int_0^L \left[(f_{blade}^v + f_{const}^v + f_{hub}^v) \delta v + \right. \\ & \left. (f_{blade}^w + f_{const}^w + f_{hub}^w) \delta w \right] dx \end{aligned} \quad (15)$$

式中, f_{blade}^v 、 f_{blade}^w 、 f_{const}^v 、 f_{const}^w 、 f_{hub}^v 、 f_{hub}^w 的表达式见附录 A 式(A7~A12)。

由式(15)可知, 与动能有关的项包括常数项(f_{const}^v 、 f_{const}^w)、叶片响应项(f_{blade}^v 、 f_{blade}^w)和轮毂运动项(f_{hub}^v 、 f_{hub}^w)。常数项由叶片旋转引起, 其大小取决于旋转频率; 与叶片响应有关的项取决于叶片的运动状态; 与轮毂运动有关的项依赖于轮毂的运动。轮毂运动被简化为 YOZ 平面内的简谐运动, 其位移幅值为 u_0 , 频率为 ω_0 , 激励方向与 Z 轴的夹角为 θ_M 。该运动可以在惯性坐标系中描述为:

$$\begin{cases} v_t = u_0 \sin(\theta_M) \cos(\omega_0 t) \\ w_t = u_0 \cos(\theta_M) \cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad (16)$$

1.3 非保守力做功

由于忽略了叶片展向力的作用, 非保守力对叶片所做功的变分 δW 为:

$$\delta W = \int_0^L (f_u \delta u + f_v \delta v + f_w \delta w) dx \quad (17)$$

式中, f_u 、 f_v 和 f_w 分别表示 x 、 y 、 z 方向的非保守力。而这些非保守力分别包括结构的阻尼力($f_{c,v}$ 、 $f_{c,w}$)和叶

片的气动力($f_{a,v}, f_{a,w}$):

$$\begin{cases} f_v = f_{a,v} + f_{c,v} \\ f_w = f_{a,w} + f_{c,w} \end{cases} \quad (18)$$

式中, $f_{a,v}$ 和 $f_{a,w}$ 分别为气动力在叶根坐标系(x - y - z)中沿 y 轴和 z 轴的分量, $f_{c,v}$ 和 $f_{c,w}$ 分别为结构阻尼产生的阻尼力, 可根据文献 [17] 提出的结构阻尼系数确定。

为了考虑流动动量损失引起的轴向和切向诱导速度, 本文基于准定常假设, 考虑自由来流速度 V 、实际入流速度 V_r (来流风速引起的法向速度 $V \cos \beta_{pc}$ 与旋转引起的切向线速度 $\Omega(r_h + x \cos \beta_{pc})$ 的矢量和) 等参数之间的几何关系, 推导旋转风力机叶片在均匀来流风中的气动力表达式, 如式 (19) 所示:

$$\begin{cases} \dot{h} \approx U_\eta - V\dot{\varepsilon} \\ \cos \alpha = U_\zeta / U \\ \sin \alpha = U_\eta / U \\ U = \sqrt{U_\eta^2 + U_\zeta^2} \end{cases} \quad (19)$$

式中: U_η 和 U_ζ 分别为 U 在 η 轴和 ζ 轴的投影分量, $\dot{h}$ 为垂直于 U 的诱导速度, ε 为叶片绕弹性中心旋转的角速度, α 为叶片攻角。旋转叶片截面气动力示意图如图 2 所示, 图中 ε_a 为叶片在气动力作用下绕弹性中心的旋转角。

根据图 2 所示的矢量关系, 可以得出二维翼型的气动力在弦线坐标系(ξ - η - ζ)中 η 轴和 ζ 轴的分量 f_η 和 f_ζ 的表达式:

$$\begin{cases} f_\eta = -f_D \cos \alpha - f_L^C \sin \alpha \\ f_\zeta = -f_D \sin \alpha + f_L^C \cos \alpha + f_L^{NC} \end{cases} \quad (20)$$

式中: f_D 为阻力, 其方向与 U 相反; 环量升力 f_L^C 方向垂直于 U ; 非环量升力 f_L^{NC} 方向与 ζ 轴正方向一致。

对于在均匀来流中周期振动的二维翼型, 其气动荷载的表达式可根据 Greenberg 的理论来推导, 二维翼型的气动力可分解为 3 部分:

$$f_D = \frac{\rho_a C_{DC} V^2}{2} \quad (21)$$

$$f_L^{NC} = \frac{\rho_a C_{La} c^2}{8} \left(\dot{h} + V\dot{\varepsilon} + \dot{V}\varepsilon - \frac{c a_p \ddot{\varepsilon}}{2} \right) \quad (22)$$

$$f_L^C = \frac{\rho_a C_{La} c V C(k)}{2} \left[\dot{h} + V\dot{\varepsilon} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{2} - a_p \right) \dot{\varepsilon} \right] + \frac{\rho_a C_{L0} c V^2}{2} \quad (23)$$

式中: ρ_a 表示空气密度; C_D 为叶片的阻力系数; C_{La} 为叶片升力系数的坡度; C_{L0} 为攻角为 0 时叶片的升力系数; c 为叶片的弦线长度; a_p 为弦长一半位置到叶

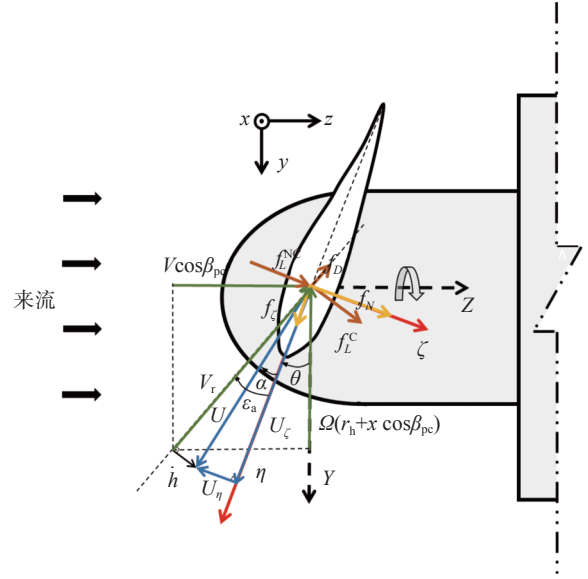


图 2 旋转叶片截面气动力示意图

Fig. 2 Schematic of aerodynamic forces in the cross section of a rotating blade

片气动中心的归一化距离; $C(k)$ 为 Theodorsen 函数, 它是关于机翼的无量纲振动频率的复函数, 用于修正旋涡脱落效应, 基于准定常假定, 取 $C(k) = 1$ 。

将式 (19、21~23) 代入式 (20) 可得式 (24)。对于旋转叶片, U_η 和 U_ζ 存在如式 (25) 所示的关系, U_η 和 U_ζ 的最终表达式如式 (26) 所示。

$$\begin{cases} f_\eta = \frac{\rho_a C_{La} c}{2} C(k) \left[U_\eta^2 + \frac{1}{2} c U_\eta \dot{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - a_p \right) \right] + \\ \quad \frac{\rho_a C_{L0} c}{2} U_\eta U_\zeta - \frac{\rho_a C_{DC}}{2} U_\zeta^2 \\ f_\zeta = \frac{\rho_a C_{La} c}{2} \left\{ C(k) \left[U_\eta U_\zeta + \frac{1}{2} c U_\zeta \dot{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - a_p \right) \right] + \right. \\ \quad \left. \frac{1}{4} c \dot{U}_\eta - \frac{1}{8} c^2 a_p \ddot{\varepsilon} \right\} + \frac{\rho_a C_{L0} c}{2} U_\zeta^2 + \frac{\rho_a C_{DC}}{2} U_\eta U_\zeta \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\xi\eta\zeta}^T \begin{Bmatrix} U_\xi \\ U_\zeta \\ U_\eta \end{Bmatrix} &= \mathbf{r}_{aero} - \mathbf{U}_{wind} = \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{v}_t \\ \dot{w}_t \end{Bmatrix} + \\ &\mathbf{i}_{x_h y_h z_h}^T \left[\mathbf{P}_{x_h y_h z_h}^T \cdot \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \mathbf{i}_{xyz}^T \left[\mathbf{P}_{xyz}^T \cdot \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \right] - \mathbf{i}_{XYZ}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{T}_c \cdot \mathbf{T}_r \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{v}_t \\ \dot{w}_t - V \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{P}_{x_h y_h z_h}^T \cdot \begin{Bmatrix} r_h \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{P}_{xyz}^T \cdot \begin{Bmatrix} x+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{cases} U_{\zeta} = \Omega \sin \theta \sin \beta_{pc} v + V \cos \theta \sin \beta_{pc} v' + \cos \theta \dot{v} - \Omega \sin \theta \sin \beta_{pc} w + V \sin \theta \sin \beta_{pc} w' + \sin \theta \dot{w} + \\ \quad (\cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta \sin \beta_{pc}) \dot{v}_t + \sin \theta \cos \beta_{pc} \dot{w}_t + \Omega \cos \theta (r_h + x \cos \beta_{pc}) - V \sin \theta \cos \beta_{pc} \\ U_{\eta} = \Omega \cos \theta \sin \beta_{pc} v - V \sin \theta \cos \beta_{pc} v' - \sin \theta \dot{v} + \Omega \sin \theta \sin \beta_{pc} w + V \cos \theta \sin \beta_{pc} w' + \cos \theta \dot{w} - \\ \quad (\cos \psi \sin \theta + \sin \psi \cos \theta \sin \beta_{pc}) \dot{v}_t + \cos \theta \cos \beta_{pc} \dot{w}_t - \Omega \sin \theta (r_h + x \cos \beta_{pc}) - V \cos \theta \cos \beta_{pc} \end{cases} \quad (26)$$

叶素-动量理论的推导基于来流垂直于叶轮平面这一假设,而在现实中,来流方向与叶轮平面的法向往往存在偏航角。因此,偏航因子需要修正,Glauert提出偏斜尾流的修正模型^[19],该模型假定来流与叶轮平面法向之间的夹角为 γ 时,尾流也发生角度为 χ 的偏转。此时,偏斜尾流将引起的轴向诱导因子发生周期性变化:

$$\begin{cases} a_{skew} = a + a_d \cos(\psi_d) \\ \quad = a + a \frac{15\pi}{32} \frac{r}{R} \tan\left(\frac{\chi}{2}\right) \cos(\psi_d) \\ \chi = (0.6a + 1)\gamma \end{cases} \quad (27)$$

式中: a_d 为位于半径 r 处的叶素修正后的轴向诱导因子 a_{skew} 的周期变化幅值; a 为轴向诱导因子; R 为叶轮半径; ψ_d 为计算 a_{skew} 采用的叶片方位角。 γ 、 χ 、 ψ_d 的定义如图3所示。

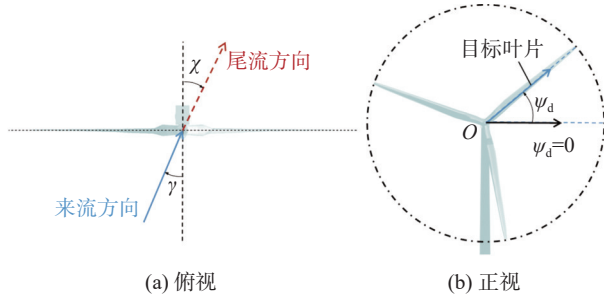


图3 流动参数定义

Fig. 3 Illustration of the flow parameters

根据哈密顿原理,联立式(6、10、15、18)可得:

$$\begin{aligned} & K_{l,v}(v, w) - K_{g,v}(v, w) + K_{n,v}(v, w) + \\ & C_{s,v}(\dot{v}, \dot{w}) - C_{a,v}(\dot{v}, \dot{w}) + M_v(\ddot{v}, \ddot{w}) \\ & = f_{a,v}^s + f_{i,v}^s + f_{a,v}^d(t) + f_{i,v}^d(t) + f_{g,v}(t) \\ & K_{l,w}(v, w) - K_{g,w}(v, w) + K_{n,w}(v, w) + \\ & C_{s,w}(\dot{v}, \dot{w}) - C_{a,w}(\dot{v}, \dot{w}) + M_w(\ddot{v}, \ddot{w}) \\ & = f_{a,w}^s + f_{i,w}^s + f_{a,w}^d(t) + f_{i,w}^d(t) + f_{g,w}(t) \end{aligned} \quad (28)$$

式中: $K_{l,v}$ 、 $K_{g,v}$ 、 $K_{n,v}$ 、 $K_{l,w}$ 、 $K_{g,w}$ 、 $K_{n,w}$ 为刚度项; $C_{s,v}$ 、 $C_{a,v}$ 、 $C_{s,w}$ 、 $C_{a,w}$ 为阻尼项; $M_v(\ddot{v}, \ddot{w})$ 和 $M_w(\ddot{v}, \ddot{w})$ 为质量项; $f_{a,v}^s$ 和 $f_{i,v}^s$ 为静态气动力荷载常数项; $f_{a,v}^d(t)$ 和 $f_{i,v}^d(t)$ 为动态气动力荷载时变项; $f_{i,v}^d(t)$ 和 $f_{i,w}^d(t)$ 是与轮毂运动相关的时变项; $f_{i,v}^s$ 和 $f_{i,w}^s$ 是与轮毂运动相关的常数项; $f_{g,v}(t)$ 和 $f_{g,w}(t)$ 是与重力相关的时变项。各项的具体表达式见附录A式(A13~A18)。

2 模型离散与验证

基于NREL 5 MW风力机^[18]验证本文连续体模型的准确性,风力机叶片的截面特性如图4所示。图中: ρA 为 x 方向上的惯性矩, ρI_{yy} 为 y 方向上的惯性矩, ρI_{zz} 为 z 方向上的惯性矩; EA 为轴向刚度; EI_{yy} 为 y 方向上的弯曲刚度; EI_{zz} 为 z 方向上的抗弯刚度; e_A 为轴向力偏心距; e_m 为弯矩等效偏心距; c 为弦长; θ_0 为初始预扭角。

2.1 模型离散

本文采用Galerkin技术获取叶片的模态振型,叶片在 y 和 z 方向的位移被展开为:

$$\begin{cases} v(x, t) = \boldsymbol{\varphi}(x)^T \boldsymbol{Q}_v(t) \\ w(x, t) = \boldsymbol{\varphi}(x)^T \boldsymbol{Q}_w(t) \end{cases} \quad (29)$$

式中: $\boldsymbol{Q}_v(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}_w(t)$ 分别为叶片在 y 和 z 方向的广义坐标向量矩阵,维度为 $d \times 1$,试探函数 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 也是一个 $d \times 1$ 的向量。

考虑将叶片视为悬臂梁的边界条件,描述挥舞和摆振方向试探函数的第 j 个分量 γ_j 和 φ_j 可表示为:

$$\begin{cases} \gamma_j(x) = \sin(\pi \beta_j x) \\ \varphi_j(x) = [\cos(\beta_j x) - \cos(h \beta_j x)] - \\ \quad \frac{\cos(\beta_j L) + \cos(h \beta_j L)}{\sin(\beta_j L) + \sin(h \beta_j L)} [\sin(\beta_j x) - \sin(h \beta_j x)] \\ \beta_j = (2j - 1)\pi / (2L) \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (30)$$

式中: β_j 为与模态阶数 j 相关的特征值,决定函数空间分布频率; n 为在模态分析中使用的试探函数数量。

使用所得的模态振型将模型离散。位移 v 、 w 可以通过模态展开离散化为:

$$v = \boldsymbol{\Phi}_v \boldsymbol{q}(t), \quad w = \boldsymbol{\Phi}_w \boldsymbol{q}(t) \quad (31)$$

考虑叶片的前三阶模态即 $j = 3$ 。因此,式(28)可转换为有限自由度的系统,写成如下矩阵形式:

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{q}} + \lambda \boldsymbol{q} + \boldsymbol{K}_j(q_1, q_2, q_3) \boldsymbol{q} + \boldsymbol{C} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{F}^s + \boldsymbol{F}^d \\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_s + \boldsymbol{C}_a \end{cases} \quad (32)$$

式中:阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为结构阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}_s$ 与气动阻尼矩

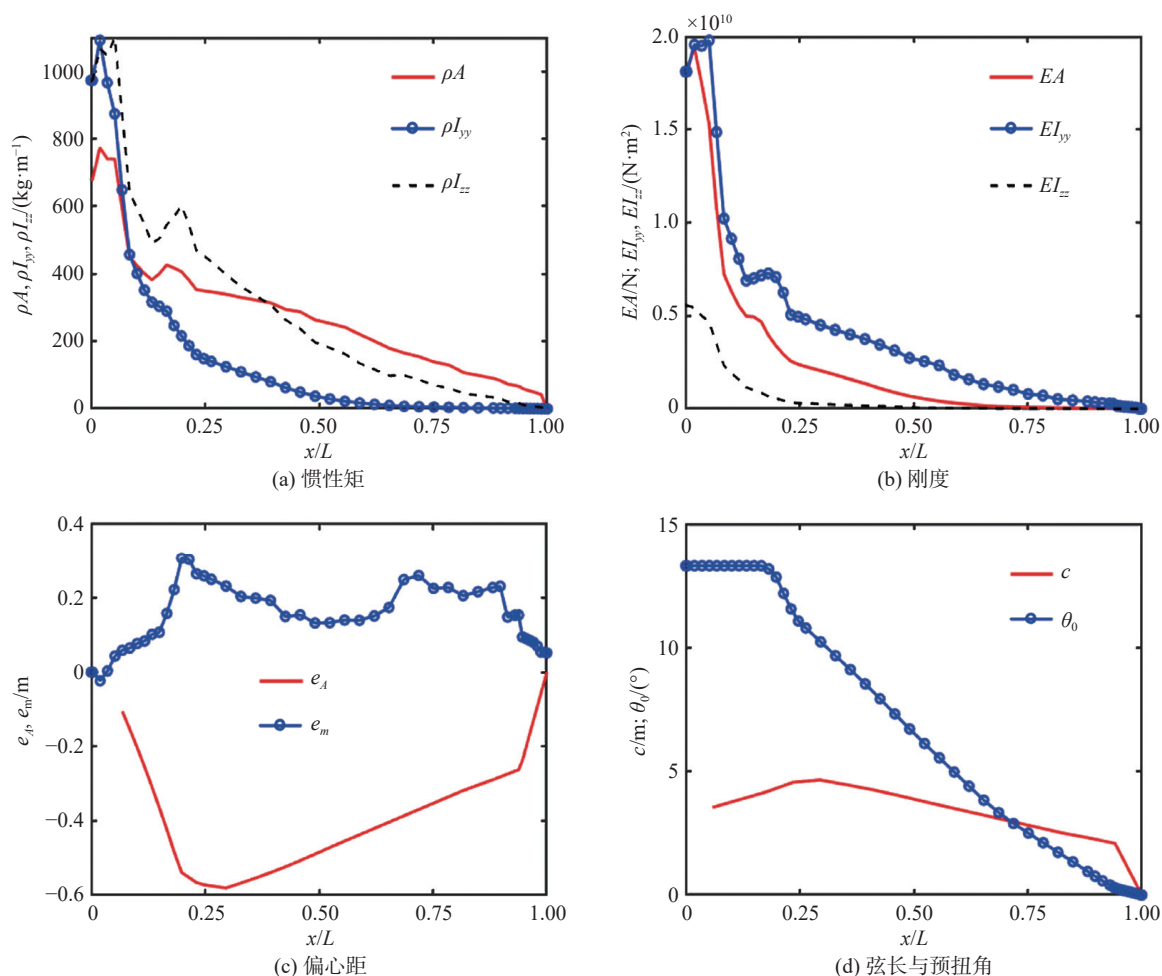


图4 风力机叶片截面特性

Fig. 4 Section properties of the wind turbine blade

阵 C_a 之和; F^s 和 F^d 分别为荷载常数项与脉动项; $K_f(q_1, q_2, q_3)$ 为非线性刚度矩阵。

计算得出的叶片的前3阶模态振型如图5所示, 叶片1~3阶模态的主导振型分别为1阶挥舞振型、1阶摆振振型、2阶挥舞振型。由于预扭角 θ_0 的存在, 各阶振型在挥舞和摆振方向都存在耦合。

2.2 模型验证

通过将本模型计算结果与文献[18]中的结果进

行对比, 验证本文模型的有效性, 如表1所示。可见, 使用本文模型计算的结果与文献[18]的结果吻合良好, 两者间的误差小于3%。

采用静力分析的方法在叶片上逐级加载均布荷载, 计算叶尖挥舞(U_z)和摆振(U_y)方向的静位移, 并与风机系统开源数值模拟软件FAST的叶片非线性计算模块 BeamDyn 计算的尖端位移进行对比, 以验证本文模型的几何非线性刚度项, 如图6所示。从图

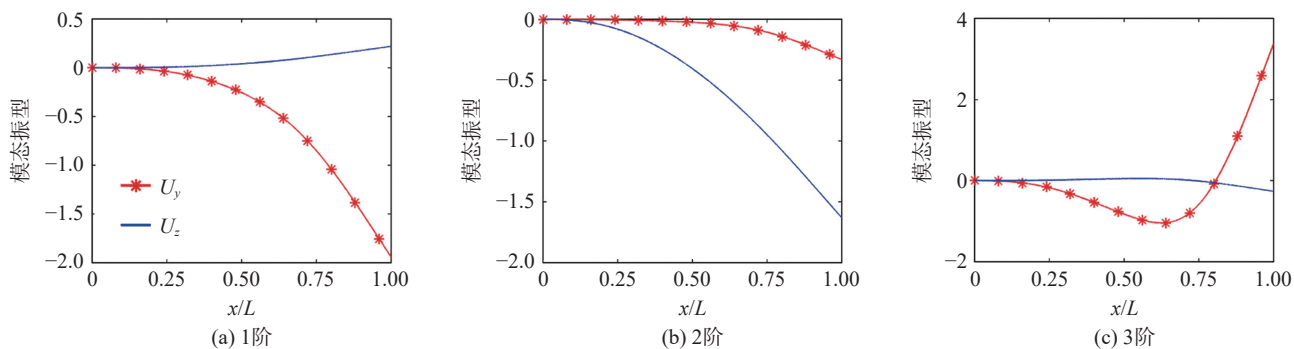


图5 叶片的前3阶模态振型

Fig. 5 First three modal shapes of the wind turbine blade

表1 叶片固有频率对比

Table 1 Natural frequency comparison of the wind turbine blade

模态阶数	本文结果/Hz	文献[18]/Hz	误差/%
1阶	0.69	0.69	-0.79
2阶	1.11	1.09	2.41
3阶	2.00	2.02	-0.91

中可以观察到,两个模型的结果在两个方向上都表现出良好的一致性,这表明了本文模型具有较高的准确性。此外,挥舞方向叶尖位移的增长率随荷载的增加而减小,表现出几何非线性的特性;而摆振方向上的叶尖位移增长率随荷载的增大而增大。这是因为荷载施加在挥舞方向,摆振方向上的叶尖位移较小,因此没有表现出几何非线性,但随着挥舞方向位移的增大,两方向位移的耦合效应变得越来越显著。

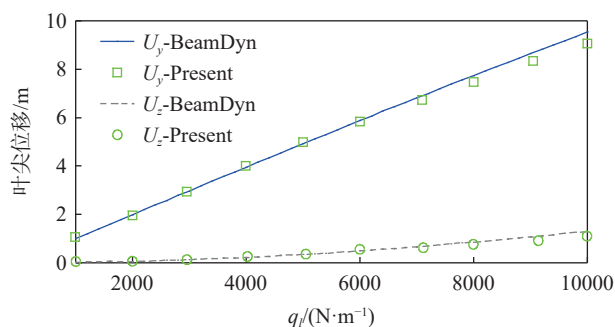


图6 使用 BeamDyn 和本文模型计算的叶尖静位移对比

Fig. 6 Comparison of static displacements of the blade tip calculated by BeamDyn and the present model

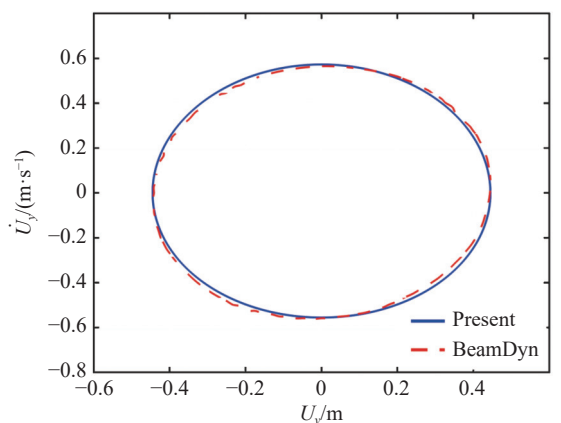
为验证运行工况下动力响应计算结果的准确性,选取风力机额定运行工况进行动力响应分析,来流风速 $V = 11.4 \text{ m/s}$ 、旋转频率 $\Omega = 1.27 \text{ rad/s}$ 、桨距角 $\theta_p = 0^\circ$,计算的叶尖位移相平面轨迹与 BeamDyn 模块(关闭支撑结构自由度)计算的结果进行对比,如图7所示。从图中可以观察到,两个模型的结果在叶片摆振和挥舞两个方向上的差异较小,均吻合良好,证明了本文模型的有效性和准确性。

3 非线性动力学分析

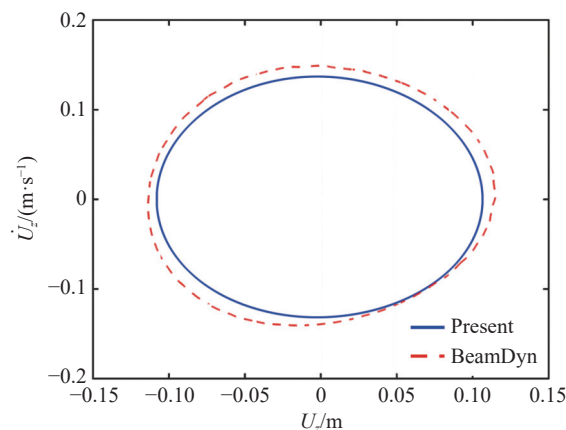
尽管叶片旋转(频率 Ω)引起的荷载也会使叶片产生振动,但由于叶片旋转频率较低(最高仅为 1.27 rad/s),无法达到叶片的共振频率(1阶约为 4.6 rad/s),叶片的振动主要由频率为 ω_0 的轮毂运动产生的荷载引起。本节将讨论激励荷载、轮毂运动幅值和偏航角对旋转叶片非线性动力响应的影响。

3.1 激励荷载的影响

旋转叶片受到周期变化的重力、轮毂运动引起的惯性力以及气动力的共同作用,叶片荷载的频率取决



(a) 摆振方向



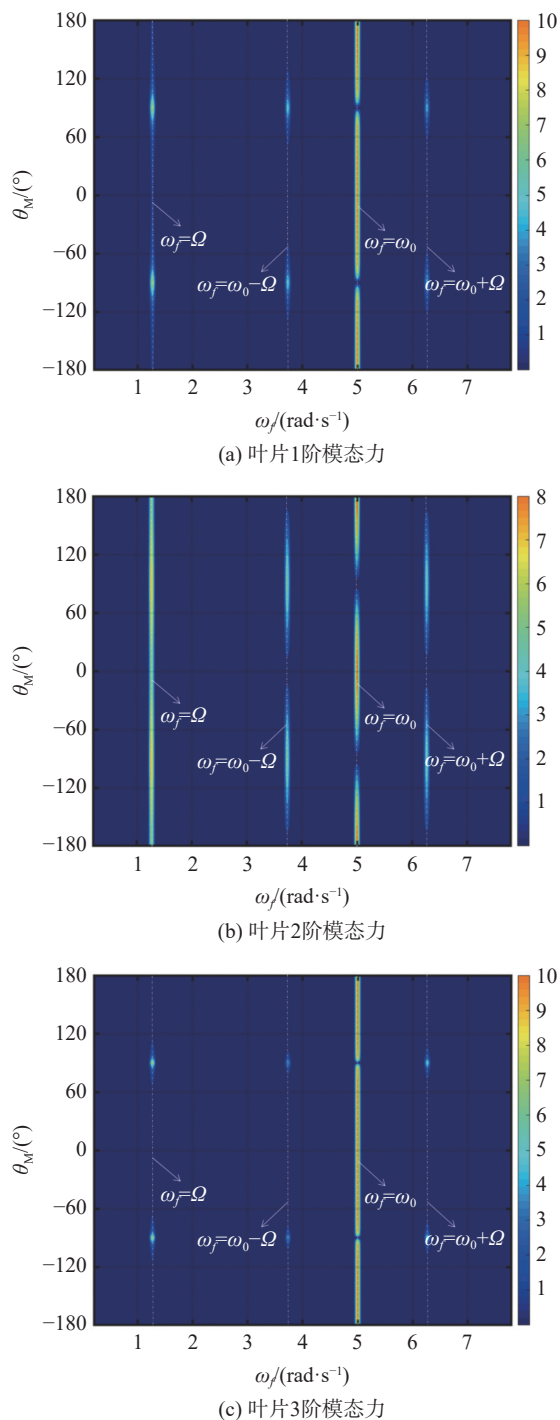
(b) 挥舞方向

图7 采用 BeamDyn 和本文模型计算的叶尖位移相平面轨迹对比

Fig. 7 Comparison of phase trajectories of the blade tip displacement predicted by BeamDyn and the present model

于轮毂运动频率 ω_0 和叶片旋转频率 Ω ,因此,系统受到多频激励。为了探究 ω_0 和 Ω 对叶片荷载的影响,本节对比不同激励方向角下叶片的各阶模态力的幅值谱(由快速 Fourier 变换得到)。轮毂运动幅值 $u_0 = 0.5 \text{ m}$ 、轮毂运动频率 $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ 时,叶片各阶模态力的幅值谱随激励方向角 θ_M 的变化如图8所示($\theta_M = 0^\circ \sim 180^\circ$)。

由图8可知,在 $\theta_M = 0^\circ$ 和 $\theta_M = \pm 180^\circ$ 条件下,第1、2、3阶模态力的幅值谱在 ω_0 和 Ω 处出现尖峰,而在 $\theta_M = \pm 90^\circ$ 条件下,第1、2、3阶模态力的幅值谱在 $\omega_0 - \Omega$ 、 $\omega_0 + \Omega$ 以及 Ω 处出现尖峰。分析其原因可能是非线性调制效应导致的,主要由附录A式(A11、A12)中 $\cos\psi\ddot{v}_t$ 和 $\sin\psi\ddot{v}_t$ 的耦合项(惯性力)以及式(A14、A16)中 $\cos\psi\dot{v}_t$ 和 $\sin\psi\dot{v}_t$ 的耦合项(气动荷载)驱动,而这些耦合项产生的原因是叶片的旋转使惯性力和重力在叶根坐标系中的投影发生了周期性变化。第1阶和第3阶模态振型由挥舞方向的位移主导,当叶片的锥角 β_{pc} 很小时,叶片的挥舞方向几乎垂直于叶轮旋转平面,该方向的惯性力和重力在叶根

图8 叶片各阶模态力幅值谱随激励方向角 θ_M 的变化Fig. 8 Variations of the amplitude spectra of blade modal forces with the excitation angle θ_M

坐标系中的投影几乎不发生变化。但第2阶模态的振型由摆振方向的位移主导,此方向的惯性力和重力在叶根坐标系中的投影发生了显著的周期性变化。

式(25)表明,偏斜来流将引起诱导因子的周期性变化,因此会对实际来流风速产生影响,进而影响叶片的气动荷载。对比不同偏航角 γ 下叶片各阶模态力的幅值谱,可以探究偏航角对叶片荷载的影响。此时的轮毂运动幅值 u_0 和频率 ω_0 分别取 0.5 m 和 5 rad/s,

θ_M 分别取 0° 和 90° 。不同偏航角 γ 下,叶片各阶模态力的幅值谱如图9所示。

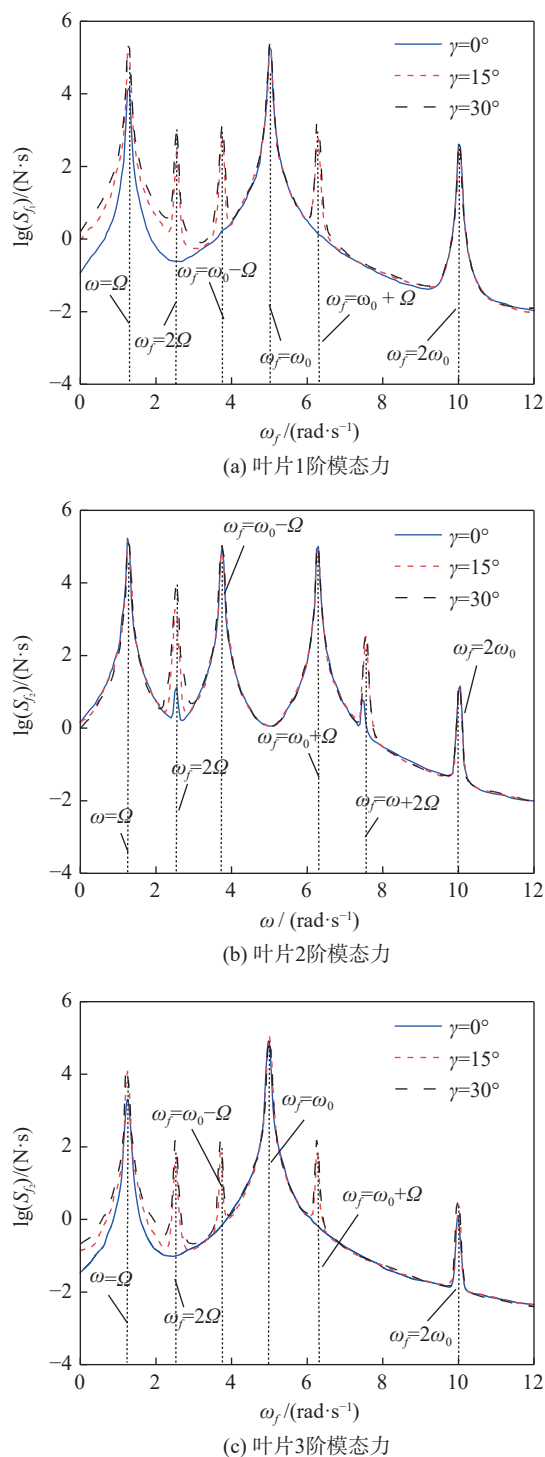


图9 不同偏航角下叶片各阶模态力幅值谱

Fig. 9 Amplitude spectra of blade modal forces under different yaw angles

比较图9(a)和(c)中的曲线可以发现,偏斜入流可导致第1、3阶模态力的幅值谱在 Ω 处的峰值增大,并使它们在 $\omega_0-\Omega$ 、 $\omega_0+\Omega$ 以及 2Ω 处出现新的尖峰。观察图9(b)中的曲线可以发现,偏斜入流会使第2阶模态力的幅值谱在 2Ω 和 $\omega_0+2\Omega$ 处的峰值变

得更高。整体而言,随着偏航角的增大,第1、2、3阶模态力幅值谱中的能量都增大了。

3.2 激励幅值的影响

轮毂运动幅值 u_0 分别设为 0.5、0.75 和 1 m。由模态振型结果可知,第1阶和第3阶模态由挥舞方向振动主导,因此为了激励这两个模态,激励方向角 θ_M 取 0° ; 而第2阶模态由摆振主导,其激励方向角 θ_M 取 90° 。图 10 为不同 u_0 下,各模态响应的幅频曲线, α_1 、 α_2 和 α_3 分别为第1阶、第2阶和第3阶模态响应的稳态幅值。

由图 10(b、c)可以观察到非线性刚度硬化效应,具体表现为:随着 u_0 的增大,峰值处的频率也逐渐增大。图 10(a)中 α_1 的曲线在 $\omega_0 = 6.4 \text{ rad/s}$ 和 13.0 rad/s 处分别出现两个峰值,考虑到叶片非线性刚度硬化效应,这两个峰值分别对应 $\omega_0 \approx \omega_1 + \Omega$ 和 $\omega_0 \approx \omega_3$,表明第1阶模态发生了主共振。然而观察图 10(b)中 α_2 的曲线($\theta_M = 90^\circ$)可以发现不同的规律:此时幅频曲线在 $\omega_0 \approx \omega_2 - \Omega$ 和 $\omega_0 \approx \omega_2 + \Omega$ 处出现两个峰值,表明第2阶模态发生了两次非线性共振现象,其中 $\omega_0 \approx \omega_2 + \Omega$ 处的模态力相对更大,这与图 8(c)所示的模态力主频是一致的。由图 10(c)可知, α_3 的曲线在 $\omega_0 \approx \omega_3 + \Omega$ 处出现较高的峰值,表明第3阶模态发生了主共振。对比这三阶模态位移的幅频曲线可以发现,在相同的 u_0 下, α_2 的峰值远高于 α_1 和 α_3 的峰值,且带宽明显更窄。这是由运行状态下叶片挥舞方向的气动阻尼高于摆振方向所致。这一规律也充分说明,在主共振条件下,摆振方向的激励将引起更高的叶片响应,可能威胁到结构的安全。

为了研究不同激励方向下叶片的动力响应,本节计算并对比了共振条件下各阶模态位移幅值随 θ_M 的变化,如图 11 所示。由图 11 可知, α_1 、 α_2 和 α_3 分别在 $\theta_M = -40^\circ$ 、 94° 和 2° 处达到最大值,并且可以注意到 α_1 、 α_2 和 α_3 达到最大值时的激励方向角 θ_M 不随轮毂运动幅值 u_0 的增大而变化。此外,值得注意的是, α_1 和 α_3 的最大值明显低于 α_2 的最大值,表明叶片摆振方向的位移在设计中十分重要。观察图 11(a)可以发现, α_1 曲线中的第二个峰值对应于第3阶模态的自振频率,这说明第1阶和第3阶模态之间可能存在能量的传递。

为了证明模态间存在能量传递,图 12 绘制了第1阶模态位移在3种不同工况下的幅频曲线:工况1,在叶片的运动方程中考虑3阶模态的贡献($q_1 + q_2 + q_3$);工况2,仅考虑叶片的前2阶模态的贡献($q_1 + q_2$);工况3,仅考虑第1阶和第3阶模态的贡献($q_1 + q_3$)。对比工况1和工况2中的幅频曲线可以发现,

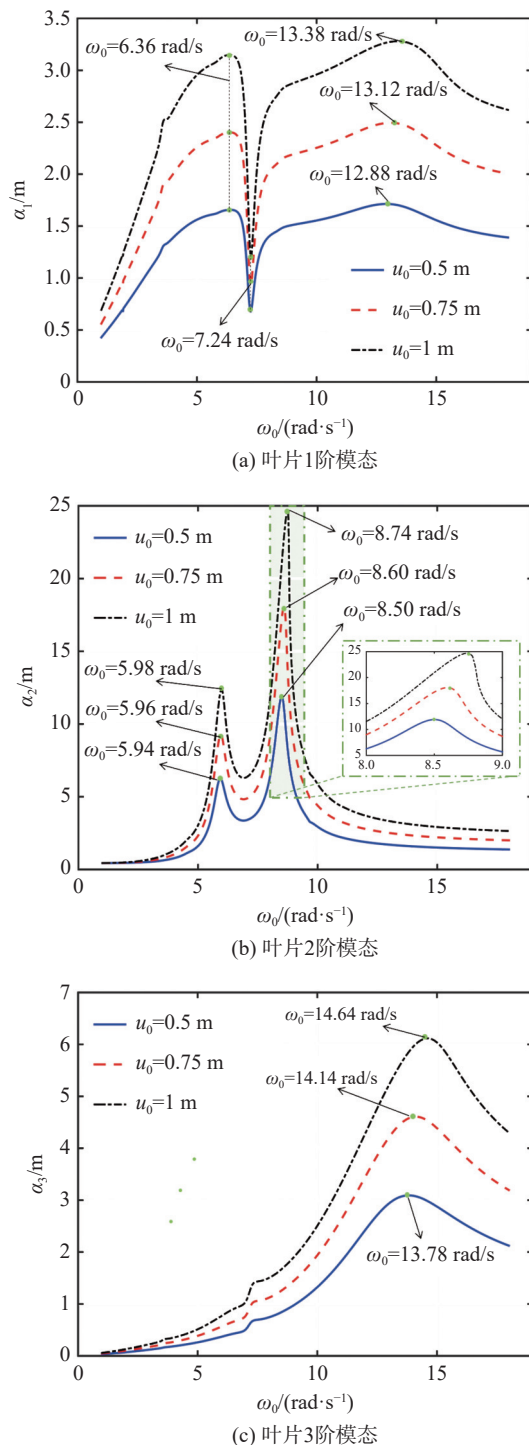
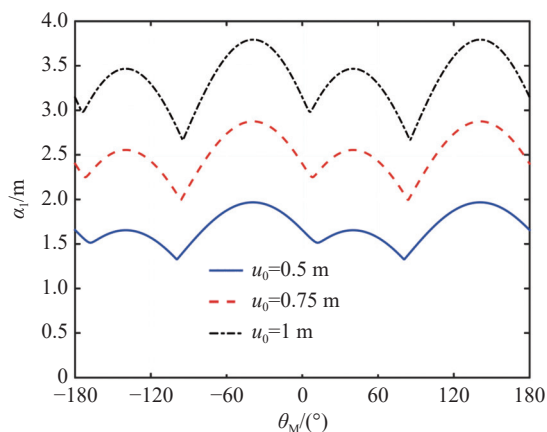


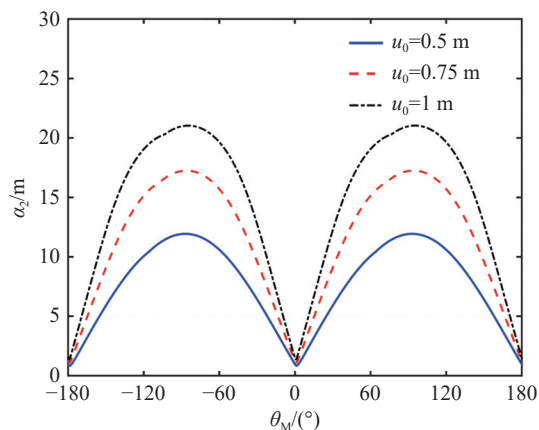
图 10 不同轮毂运动幅值下叶片各阶模态位移的幅频曲线

Fig. 10 Amplitude-frequency curves of the blade modal displacements under different hub motion amplitudes

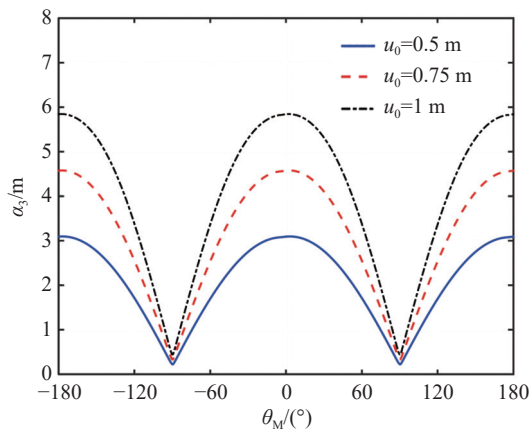
当不考虑第3阶模态时, α_1 中的第二个峰值消失,这说明能量从第3阶模态转移到第1阶模态,证明在旋转的叶片中会发生模态间的1:3内共振。对比工况1和工况3中的幅频曲线可以发现,当不考虑第2阶模态时, α_1 曲线中的峰谷值消失。这说明,尽管第1阶模态和第2阶模态的振型方向几乎正交,能量仍然能从第1阶模态传递到第2阶模态,发生模态间的



(a) 叶片1阶模态



(b) 叶片2阶模态



(c) 叶片3阶模态

图 11 不同轮毂运动幅值下叶片各阶模态位移幅值随激励方向角 θ_M 的变化Fig. 11 Variations of modal displacement amplitudes with the excitation angle θ_M at different hub motion amplitudes

内共振。

3.3 偏航角

偏航角 γ 分别取 0° 、 10° 、 20° 和 30° ，轮毂运动幅值 u_0 固定为 0.5 m 。不同偏航角下前 3 阶模态的幅频曲线如图 13 所示。

由图 13 可知，随着 γ 的增加，第 1 阶模态位移的幅值显著增加，第 3 阶模态位移的幅值仅在其共振峰

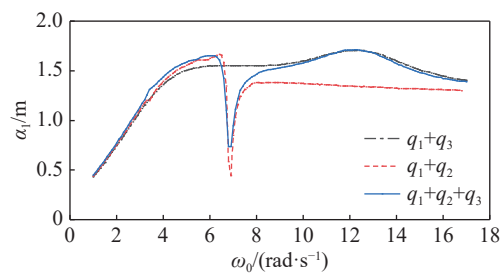
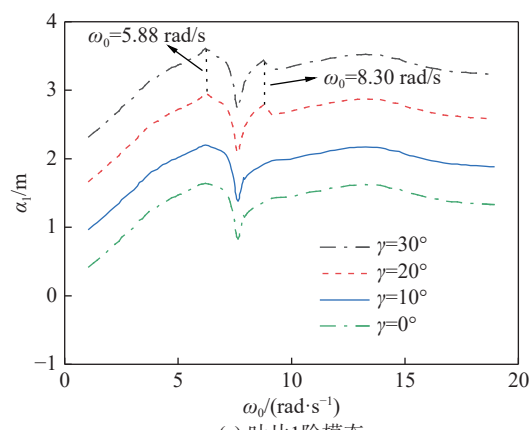
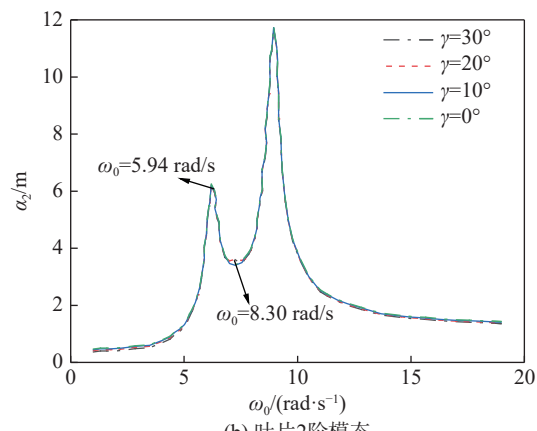


图 12 不同工况下第 1 阶模态位移的幅频曲线

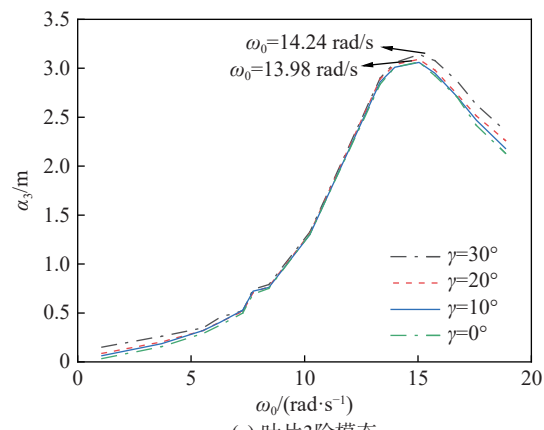
Fig. 12 Amplitude-frequency curves of the first modal displacement under different conditions



(a) 叶片1阶模态



(b) 叶片2阶模态



(c) 叶片3阶模态

图 13 不同偏航角 γ 下叶片各阶模态位移的幅频曲线Fig. 13 Amplitude-frequency curves of blade modal displacements under different yaw angles γ

值附近略微增加,第2阶模态位移的幅值变化并不显著。这是因为偏斜来流引起诱导因子的周期变化,进而改变了叶片的气动阻尼。此外, α_1 的幅频曲线在5.88 rad/s和8.30 rad/s处出现两个小尖峰,这两个峰对应于 $\omega_0 \approx \omega_2 - \Omega$ 和 $\omega_2 + \Omega$ 。

将轮毂运动频率 ω_0 固定为6.36、8.50和13.78 rad/s,计算 α_1 、 α_2 和 α_3 随 θ_M 的变化曲线,可研究偏航角对各阶模态最不利激励方向的影响,如图14所示。

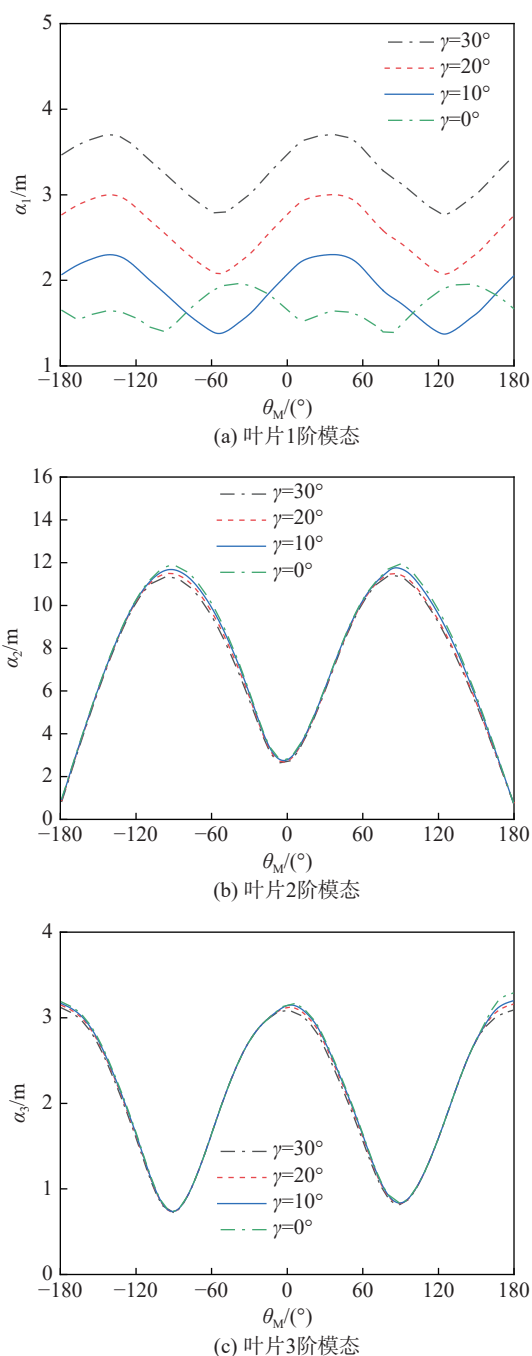


图14 不同偏航角下叶片各阶模态位移幅值随激励方向角 θ_M 的变化

Fig. 14 Variations of the modal displacement amplitudes with the excitation angle θ_M under different yaw angles

由图14可知, γ 取 0° 时, α_1 在 $\theta_M = -40^\circ$ 附近达到最大值,而 γ 取 10° 、 20° 和 30° 时, α_1 在 $\theta_M = 32^\circ$ 时达到最大值; α_2 和 α_3 在4个 γ 值下,最大值对应的 θ_M 基本相同。这一结果表明,在叶片的3阶模态中,第1阶模态对偏航角的变化是最敏感的。

4 结论

本文采用考虑三次非线性项的Euler-Bernoulli梁模拟单个柔性叶片,基于广义Hamilton原理推导了风力机叶片系统的连续体数学模型,该模型能够反映几何非线性效应,同时计算效率远高于有限元法(仅引入了11个自由度)。通过文献[18]和开源数值模拟软件FAST验证了模型的准确性,并利用该模型进行了动力学分析,重点讨论了激励幅值、偏航角对旋转叶片非线性动力响应的影响。得出以下结论:

1) 偏斜来流会影响激振力的主导频率,在叶片旋转频率下,周期性激励会加强。因此,有必要将偏航角作为系统检测和振动控制的指标,应检查瞬时偏航角,以考虑其对叶片振动幅度的影响。

2) 由于运行状态下叶片挥舞方向的气动阻尼高于摆振方向,在相同的激励幅值下,第2阶模态的峰值远高于第1、3阶模态的峰值,且带宽明显更窄。因此,在主共振条件下,摆振方向的激励将引起更高的叶片响应,可能威胁到结构的安全。

3) 旋转叶片第1阶模态的第二个峰值对应于第3阶模态的自振频率,这说明第1阶和第3阶模态之间可能存在能量的传递,旋转的叶片中会发生模态间的1:3内共振。

4) 运行状态下,叶片第1阶模态响应的振幅对偏航角最为敏感,会随着偏航角的增大而显著增大;第2阶和第3阶模态响应的振幅则几乎不受偏航角影响。此外,对于第1阶模态位移,其最不利支座激励方向(轮毂运动方向)随偏航角的变化发生显著变化;对于第2阶和第3阶模态位移,其最不利支座激励方向几乎不受偏航角的影响。

本文研究为大型风力机叶片的设计与运行优化提供了重要的理论依据,通过揭示非线性振动特性和内共振机制,显著提升了叶片动态响应预测的准确性,对增强叶片可靠性、延长使用寿命及降低维护成本具有重要工程价值。然而,模型未考虑复杂环境荷载(如湍流)的耦合作用,未来可结合多物理场耦合方法进一步研究,并探索基于主动控制的振动抑制策略,以提升叶片在实际工况下的动态性能与可靠性。

参考文献:

- [1] O'NEILL S. Giant turbines poised to claim offshore wind[J]. Engineering, 2021, 7(7): 894–896.
doi: [10.1016/j.eng.2021.06.003](https://doi.org/10.1016/j.eng.2021.06.003)
- [2] ZHANG Z L, LI J, NIELSEN S R K, et al. Mitigation of edgewise vibrations in wind turbine blades by means of roller dampers[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(21): 5283–5298.
doi: [10.1016/j.jsv.2014.06.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.06.006)
- [3] REZAEI M M, BEHZAD M, HADDADPOUR H, et al. Aeroelastic analysis of a rotating wind turbine blade using a geometrically exact formulation[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(4): 2367–2392.
doi: [10.1007/s11071-017-3591-1](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3591-1)
- [4] MALCOLM D J, LAIRD D L. Extraction of equivalent beam properties from blade models[J]. Wind Energy, 2007, 10(2): 135–157.
doi: [10.1002/we.213](https://doi.org/10.1002/we.213)
- [5] WANG Q, SPRAGUE M A, JONKMAN J, et al. BeamDyn: A high-fidelity wind turbine blade solver in the FAST modular framework[J]. Wind Energy, 2017, 20(8): 1439–1462.
doi: [10.1002/we.2101](https://doi.org/10.1002/we.2101)
- [6] 钱晓航, 郜志腾, 王同光, 等. 百米级大柔性风电叶片非线性气弹响应分析[J]. 空气动力学学报, 2022, 40(4): 220–230.
QIAO X H, GAO Z T, WANG T G, et al. Nonlinear aeroelastic response analysis of 100-meter-scale flexible wind turbine blades[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2022, 40(4): 220–230(in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2021.0321](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0321)
- [7] LI L, LI Y H, LIU Q K, et al. Flapwise non-linear dynamics of wind turbine blades with both external and internal resonances[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 61: 1–14.
doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.006](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.006)
- [8] JOKAR H, MAHZOON M, VATANKHAH R. Dynamic modeling and free vibration analysis of horizontal axis wind turbine blades in the flapwise direction[J]. Renewable Energy, 2020, 146: 1818–1832.
doi: [10.1016/j.renene.2019.07.131](https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.07.131)
- [9] YUAN G F, WANG Y F. Internal, primary and combination resonances of a wind turbine blade with coupled flapwise and edgewise motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 514: 116439.
doi: [10.1016/j.jsv.2021.116439](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116439)
- [10] YANG X D, WANG S W, ZHANG W, et al. Dynamic analysis of a rotating tapered cantilever Timoshenko beam based on the power series method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(10): 1425–1438.
doi: [10.1007/s10483-017-2249-6](https://doi.org/10.1007/s10483-017-2249-6)
- [11] KARIMI B, MORADI H. Nonlinear kinematics analysis and internal resonance of wind turbine blade with coupled flapwise and edgewise vibration modes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 435: 390–408.
doi: [10.1016/j.jsv.2018.08.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.017)
- [12] WEI K, ARWADE S R, MYERS A T, et al. Directional effects on the reliability of non-axisymmetric support structures for offshore wind turbines under extreme wind and wave loadings[J]. Engineering Structures, 2016, 106: 68–79.
doi: [10.1016/j.engstruct.2015.10.016](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.10.016)
- [13] LI Z B, YANG X L. Large-eddy simulation on the similarity between wakes of wind turbines with different yaw angles[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2021, 921: A11.
doi: [10.1017/jfm.2021.495](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.495)
- [14] HANSEN M H. Aeroelastic instability problems for wind turbines[J]. Wind Energy, 2007, 10(6): 551–577.
doi: [10.1002/we.242](https://doi.org/10.1002/we.242)
- [15] SNEEL H, SCHEPERS J G. Joint investigation of dynamic inflow effects and implementation of an engineering method: ECN-C-94-107 [R]. ETDEWEB, 1995.
- [16] GREENBERG J. Airfoil in sinusoidal motion in a pulsating stream: NACA-TN-1326 [R]. NASA, 1947
- [17] MORIARTY P J, HANSEN A C. AeroDyn theory manual: NREL/TP-500-36881 [R]. NREL, 2005.
- [18] JONKMAN J, BUTTERFIELD S, MUSIAL W, et al. Definition of a 5-MW reference wind turbine for offshore system development: NREL/TP-500-38060 [R]. NREL, 2009.
doi: [10.2172/947422](https://doi.org/10.2172/947422)
- [19] GLAUERT H. A General theory of the autogyro [R]. AERADE, 1926.

(本文责编: 张兴焕)

附录 A

公式推导

$$\begin{aligned}
 U_{n,v}(v, w) = & A''_1 v'^2 v'' + A'_1 (3v' v''^2 + 2v'^2 v''') + A_1 (v''^3 + 4v' v'' v''' + v'^2 v'''') + \\
 & \frac{1}{2} (A'_1 + A'_2) (v'' w' w'' + 2v' w''^2 + 2v' w' w''') + \\
 & \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \cdot (v'' w''^2 + 3v' w'' w''' + v'' w' w'''' + v' w' w'''') + \frac{1}{2} A''_3 (w'^2 w'' + v'^2 w'' + 2v' v'' w') + \\
 & \frac{1}{2} A'_3 (3w' w''^2 + 6v' v'' w'' + 3v''^2 w' + 4v' v''' w' + w'^2 w''' + 2v'^2 w''') + \\
 & \frac{1}{2} A_3 (v''^3 + 4w' w'' w''' + w'^2 w'''' + v'^2 w'''' + 4v'' v''' w' + 3v''^2 w'' + 2v' v'''' w' + 4v' v''' w'' + 4v' v'' w''') \quad (A1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{n,w}(v, w) = & A''_2 w'^2 w'' + A'_2 (3w' w''^2 + 2w'^2 w''') + A_2 (w''^3 + 4w' w'' w''' + w'^2 w'''') + \\
 & \frac{1}{2} (A'_1 + A'_2) (v' v'' w'' + 2v''^2 w' + 2v' v''' w') + \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \cdot (v''^2 w'' + 3v'' v''' w' + v' v'''' w' + v' v''' w'') + \\
 & \frac{1}{2} A''_3 (v'^2 v'' + v'' w'^2 + 2v' w' w'') + \frac{1}{2} A'_3 (3v' v''^2 + 6v'' w' w'' + 3v' w''^2 + 4v' w' w''' + v'^2 v''' + 2v''' w'^2) + \\
 & \frac{1}{2} A_3 (v''^3 + 4v' v'' v''' + v'^2 v'''' + v'''' w'^2 + 4v''' w' w'' + 3v'' w''^2 + 2v' w' w'''' + 4v'' w' w'' + 4v''' w' w'') \quad (A2)
 \end{aligned}$$

$$f_{g,c}^v = \rho A g \sin \psi - (\rho A e_m g \cos \psi \cos \theta \cos \beta_{pc})' \quad (A3)$$

$$f_{g,c}^w = \rho A g \cos \psi \sin \beta_{pc} - (\rho A e_m g \cos \psi \sin \theta \cos \beta_{pc})' \quad (A4)$$

$$f_{g,k}^v = [\rho A e_m g \sin \psi \cos \theta v' + 0.5 (\rho A e_m g \sin \psi \sin \theta + \rho A e_m g \cos \psi \cos \theta \sin \beta_{pc}) w']' \quad (A5)$$

$$f_{g,k}^w = [\rho A e_m g \cos \psi \sin \theta \sin \beta_{pc} w' + 0.5 (\rho A e_m g \sin \psi \sin \theta + \rho A e_m g \cos \psi \cos \theta \sin \beta_{pc}) v']' \quad (A6)$$

$$f_{const}^v = -\rho A e_m \Omega^2 \cos \theta - [\rho A e_m \Omega^2 x \cos \theta \cos^2 \beta_{pc} + \rho A e_m \Omega^2 r_h \cos \theta \cos \beta_{pc} - B_3 \Omega^2 \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc}]' \quad (A7)$$

$$f_{const}^w = \rho A \Omega^2 r_h \sin \beta_{pc} + \rho A \Omega^2 x \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} - \rho A e_m \Omega^2 \sin \theta \sin^2 \beta_{pc} -$$

$$[\rho A e_m \Omega^2 x \sin \theta \cos^2 \beta_{pc} + \rho A e_m \Omega^2 r_h \sin \theta \cos \beta_{pc} - B_2 \Omega^2 \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc}]'' \quad (A8)$$

$$f_{blade}^v = \rho A \ddot{v} - 2\rho A e_m \Omega \cos \theta \cos \beta_{pc} \dot{v}' - 2\rho A \Omega \sin \beta_{pc} \dot{w} - 2\rho A e_m \Omega \sin \theta \cos \beta_{pc} w' - \rho A \Omega^2 v -$$

$$[B_1 \ddot{v}' + B_3 \ddot{w}' + 2\rho A e_m \Omega \cos \theta \cos \beta_{pc} \dot{v} + B_1 \Omega^2 \sin^2 \beta_{pc} v' +$$

$$0.5 (-\rho A e_m \Omega^2 r_h \cos \theta \sin \beta_{pc} - \rho A e_m \Omega^2 x \cos \theta \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} +$$

$$B_3 \Omega^2 (2 \sin^2 \beta_{pc} - \cos^2 \beta_{pc}) w' - \rho A e_m \Omega^2 \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} \cos \theta w']' +$$

$$[v' \int_x^L (\rho A \Omega^2 \cos^2 \beta_{pc} x + \rho A \Omega^2 \cos \beta_{pc} r_h - \rho A e_m \Omega^2 \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} \sin \theta) dx]' \quad (A9)$$

$$f_{blade}^w = \rho A \ddot{w} + 2\rho A \Omega \sin \beta_{pc} \dot{v} - \rho A e_m \Omega^2 \cos \theta \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} v' - \rho A e_m \Omega^2 \sin \theta \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} w' - \rho A \Omega^2 \sin^2 \beta_{pc} w -$$

$$\{B_3 \ddot{v}' + B_2 \ddot{w}' + 2\rho A e_m \Omega \sin \theta \cos \beta_{pc} \dot{v} - \rho A e_m \Omega^2 \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} \sin \theta w + 0.5 [-\rho A e_m \Omega^2 r_h \cos \theta \sin \beta_{pc} -$$

$$\rho A e_m \Omega^2 x \cos \theta \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} + B_3 \Omega^2 (2 \sin^2 \beta_{pc} - \cos^2 \beta_{pc})] v' + 0.5 [-\rho A e_m \Omega^2 r_h \sin \theta \sin \beta_{pc} -$$

$$\rho A e_m \Omega^2 x \sin \theta \cos \beta_{pc} \sin \beta_{pc} + 2B_2 \Omega^2 (\sin^2 \beta_{pc} - \cos^2 \beta_{pc})] w'\}' \quad (A10)$$

$$f_{hub}^v = \rho A \cos \psi \ddot{v}_t + (\rho A e_m \sin \psi \cos \theta \cos \beta_{pc} \ddot{v}_t + \rho A e_m \cos \theta \sin \beta_{pc} \ddot{w}_t)' \quad (A11)$$

$$f_{hub}^w = -\rho A \sin \psi \sin \beta_{pc} \ddot{v}_t + \rho A \cos \beta_{pc} \ddot{w}_t + (\rho A e_m \sin \psi \sin \theta \cos \beta_{pc} \ddot{v}_t + \rho A e_m \sin \theta \sin \beta_{pc} \ddot{w}_t)' \quad (A12)$$

$$f_{a,v}^s = \left(\frac{1}{2} \rho_a C_{La} c \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_a C_{L0} c \sin \theta \right) (V \cos \beta_{pc})^2 +$$

$$\left(\frac{1}{2} \rho_a C_{La} c \sin \theta + \frac{1}{2} \rho_a C_{L0} c \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_a C_{Dc} \cos \theta \right) \Omega x (\cos \beta_{pc} + r_h) V \cos \beta_{pc} +$$

$$\frac{1}{4} \rho_a C_{La} c^2 \sin \beta_{pc} \Omega V \cos \beta_{pc} - \frac{1}{2} \rho_a C_{Dc} \cos \theta [\Omega (x \cos \beta_{pc} + r_h)]^2 \quad (A13)$$

$$\begin{aligned}
f_{a,v}^d = & \frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \left[\cos\theta (\sin\beta_{pc} \sin\psi \dot{v}_t - \cos\beta_{pc} \dot{v}_t)^2 + \sin\theta (\sin\beta_{pc} \cos\psi \sin\psi \dot{v}_t^2 - \cos\beta_{pc} \cos\psi \dot{v}_t \dot{w}_t) + \right. \\
& \frac{1}{2}\rho_a c (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta + C_D \sin\theta) V \cos\beta_{pc} \cos\psi \dot{v}_t - \frac{1}{2}\rho_a c \left[C_D \cos\theta \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) + \right. \\
& \left. \frac{1}{4}\rho_a C_{La} c \sin\beta_{pc} \cos\theta \sin\theta \Omega \right] \cos\psi \dot{v}_t + \frac{1}{2}\rho_a c \sin\beta_{pc} (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta + C_D \sin\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \sin\psi \dot{v}_t + \\
& \frac{1}{2}\rho_a C_{La} c^2 \left(\frac{1}{4} \sin^2\theta + \frac{1}{2} \sin^2\beta_{pc} \right) \Omega \sin\psi \dot{v}_t + \frac{1}{2}\rho_a c \cos\beta_{pc} (-C_{La} \cos\theta + C_{L0} \sin\theta) V \cos\beta_{pc} \dot{w}_t - \\
& \left. \frac{1}{2}\rho_a c \cos\beta_{pc} (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta + C_D \sin\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{w}_t - \frac{1}{4}\rho_a C_{La} c^2 \cos\beta_{pc} \sin\beta_{pc} \Omega \dot{w}_t \right] \quad (A14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{a,w}^s = & \left(\frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \cos\theta - \frac{1}{2}\rho_a C_{L0} c \sin\theta + \frac{1}{2}\rho_a C_{Dc} \cos\theta \right) \Omega x (\cos\beta_{pc} + r_h) V \cos\beta_{pc} - \frac{1}{2}\rho_a C_{Dc} \sin\theta (V \cos\beta_{pc})^2 + \\
& \left(\frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \sin\theta + \frac{1}{2}\rho_a C_{L0} c \cos\theta \right) \left[\Omega x (\cos\beta_{pc} + r_h) \right]^2 + \frac{1}{4}\rho_a C_{La} c^2 \sin\beta_{pc} \Omega^2 x (\cos\beta_{pc} + r_h) \quad (A15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{a,w}^d = & \frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \sin\theta \cos^2\psi \dot{v}_t^2 + \frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \cos\theta \sin\beta_{pc} \cos\psi \sin\psi \dot{v}_t^2 - \frac{1}{2}\rho_a C_{La} c \cos\theta \cos\beta_{pc} \cos\psi \dot{v}_t \dot{w}_t + \\
& \frac{1}{2}\rho_a c (C_{La} \cos\theta - C_{L0} \sin\theta + C_D \cos\theta) V \cos\beta_{pc} \cos\psi \dot{v}_t - \rho_a C_{Dc} \sin\theta \sin\beta_{pc} V \cos\beta_{pc} \sin\psi \dot{v}_t + \rho_a c \\
& (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \cos\psi \dot{v}_t + \rho_a C_{La} c^2 \sin\beta_{pc} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos^2\theta \right) \Omega \cos\psi \dot{v}_t + \\
& \rho_a c \sin\beta_{pc} (C_{La} \cos\theta - C_{L0} \sin\theta + C_D \cos\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \sin\psi \dot{v}_t - \frac{1}{8}\rho_a C_{La} c^2 \cos\theta \sin\theta \Omega \sin\psi \dot{v}_t + \\
& \rho_a C_{Dc} \cos\beta_{pc} \sin\theta V \cos\beta_{pc} \dot{w}_t + \frac{1}{2}\rho_a c \cos\beta_{pc} (-C_{La} \cos\theta + C_{L0} \sin\theta - C_D \cos\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{w}_t \quad (A16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{a,v} = & \frac{1}{2}\rho_a c (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta + C_D \sin\theta) V \cos\beta_{pc} \dot{v} - \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \sin^2\theta V \sin\beta_{pc} \dot{v}' - \rho_a c C_{Dc} \cos\theta \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{v} + \\
& \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \cos\theta \sin\theta \Omega \sin\beta_{pc} \dot{v} + \rho_a c (-C_{La} \cos\theta + C_{L0} \sin\theta) V \cos\beta_{pc} \dot{w} + \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \cos\theta \sin\theta V \sin\beta_{pc} \dot{w}' - \frac{1}{2}\rho_a c \\
& (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta + C_D \sin\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{w} - \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} (1 + \cos^2\theta) \Omega \sin\beta_{pc} \dot{w} - \frac{1}{32}\rho_a c^3 C_{La} \sin\theta \Omega \cos\beta_{pc} \dot{w}' + \\
& \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \sin\theta \sin\beta_{pc} \sin\psi \dot{v}_t \dot{v} - \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \sin\theta \cos\beta_{pc} \dot{w}_t \dot{v} - \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \sin\theta \cos\psi \dot{v}_t \dot{w} - \rho_a c C_{La} \cos\theta \sin\beta_{pc} \sin\psi \dot{v}_t \dot{w} + \\
& \rho_a c C_{La} \cos\theta \cos\beta_{pc} \dot{w}_t \dot{w} \quad (A17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{a,w} = & \frac{1}{2}\rho_a c (C_{La} \cos\theta - C_{L0} \sin\theta + C_D \cos\theta) V \cos\beta_{pc} \dot{v} + \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \cos\theta \sin\theta V \sin\beta_{pc} \dot{v}' + \rho_a c \\
& (C_{La} \sin\theta + C_{L0} \cos\theta) \Omega (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{v} + \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} (1 + \sin^2\theta) \Omega \sin\beta_{pc} \dot{v} + \rho_a c C_{Dc} \sin\theta V \\
& \cos\beta_{pc} \dot{w} - \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \cos^2\theta V \sin\beta_{pc} \dot{w}' + \frac{1}{2}\rho_a c (-C_{La} \cos\theta + C_{L0} \sin\theta - C_D \cos\theta) \Omega \\
& (x \cos\beta_{pc} + r_h) \dot{w} - \frac{1}{8}\rho_a c^2 C_{La} \cos\theta \sin\theta \Omega \sin\beta_{pc} \dot{w} + \frac{1}{32}\rho_a c^2 C_{La} \cos\theta \Omega \cos\beta_{pc} \dot{w}' + \rho_a c C_{La} \sin\theta \cos\psi \dot{v}_t \dot{v} + \\
& \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \cos\theta \sin\beta_{pc} \sin\psi \dot{v}_t \dot{v} - \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \cos\theta \cos\beta_{pc} \dot{w}_t \dot{v} - \frac{1}{2}\rho_a c C_{La} \cos\theta \sin\psi \dot{v}_t \dot{w} \quad (A18)
\end{aligned}$$